ISSN 2354-6948

METODE ELIMINASI DAN SUBSTITUSI DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN KUARDRATIK IRISAN KERUCUT

Nurul Saila[1]

[1]Staf Pengajar, Universitas Panca Marga, Probolinggo
nurul.saila@upm.ac.id[1]

(diterima: 11.11.2013, direvisi: 25.11.2013)

Abstrak

Metode eliminasi dan metode substitusi adalah metode-metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier. Menyelesaikan system persamaan linier dengan dua variable x dan y dengan metode substitusi adalah dengan mengubah suatu persamaan dalam system menjadi x = (dalam y) atau y = (dalam x) kemudian mensubstitusikannya pada persamaan yang lain. Sedangkan menyelesaikan system persamaan linier dengan dua variable x dan y dengan metode eliminasi adalah dengan mengeliminir satu variable untuk mendapatkan nilai variable kedua, kemudian mensubstitusikan nilai variable yang didapat ke salah satu persamaan dalam system untuk mendapatkan nilai variable yang lain.

Sistem persamaan kuadratik irisan kerucut adalah sistem persamaan yang memuat persamaan kuadratik irisan kerucut yang banyaknya berhingga. Persamaan Kuadratik irisan Kerucut adalah persamaan kurva yang merupakan hasil perpotongan antara sebuah bidang dengan kerucut. Persamaan Kuadratik Irisan Kerucut merupakan persamaan kuadrat dengan dua variable x dan y, yaitu: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$*, dimana A, B, C, D, E, F*□*R dan A, B, C tidak sama dengan nol pada waktu yang sama.*

Menyelesaikan system persamaan kuadratik irisan kerucut dengan metode substitusi adalah dengan mengubah suatu persamaan dalam system menjadi x = (dalam y) atau y = (dalam x) kemudian mensubstitusikannya pada persamaan yang lain. Sedangkan menyelesaikan system persamaan kuadratik dengan metode eliminasi adalah dengan mengeliminir satu suku yang mengandung x atau y atau xy atau x_2 *atau* y_2 *kemudian mengubah persamaan kuadratik atau persamaan linier yang didapat menjadi x = (dalam y) atau y = (dalam x) dan mensubstitusikannya pada salah satu persamaan dalam system.*

Kata Kunci: metode eliminasi, metode substitusi, system persamaan, persamaan kuadratik irisan kerucut.

PENDAHULUAN

Metode Eliminasi

Ide utama dari menyelesaikan sistem persamaan (persamaan linier dengan variabel x dan y) dengan metode Eliminasi adalah mengeleminir satu variabel dalam sistem persamaan sehingga terbentuk satu persamaan dengan satu variabel, sehingga penyelesaian untuk variabel tersebut dapat ditentukan dengan mudah. Sedangkan nilai dari variabel yang lain diperoleh dengan mensubtitusikan nilai dari variabel yang telah diperoleh ke persamaan dalam sistem.

Metode ini didasarkan oleh sifat kesamaan bilangan real, yaitu :

1. a = b dan c = d ® a + c = b + d;
2. a = b dan c = d ® a - c = b - d;
3. a = b dan c = d ® a c = b d;
4. a = b dan c = d ¯0 ®

Sehingga dalam persamaan: Ax + By = C, berlaku:

1. Ax + By = C ® k(Ax + By) = kC;
2. Ax + By = C ® (Ax + By)/k = C/k;

Dan dalam suatu sistem persamaan linier dengan variable x dan y:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

Dan k, l □ R, k ¯0, l ¯0berlaku:

1. k $(A_1x + B_1y)$ + 1$(A_2x + B_2)$ = kC_1 + 1C_2
2. k $(A_1x + B_1y)$ - 1$(A_2x + B_2)$ = kC_1 - 1C_2

$$3.\ \frac{A_1x + B_1y}{k} + \frac{A_2x + B_2y}{l} = \frac{C_1}{k} + \frac{C_2}{l}$$

$$4.\ \frac{A_1x + B_1y}{k} - \frac{A_2x + B_2y}{l} = \frac{C_1}{k} - \frac{C_2}{l}$$

Sehingga langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan (persamaan linier dengan variabel x dan y) dengan metode Eliminasi adalah:

1. Ubah persamaan dalam sistem ke bentuk: Ax + By = C.
2. Samakan koefisien dari variabel yang akan dieliminir dengan mengalikan atau membaginya dengan bilangan real atau ubah sehingga koefisien variabel yang akan dieliminir dari satu persamaan merupakan lawan dari koefisien variabel yang akan dieliminir dari persamaan yang lain dengan mengalikan atau membaginya dengan bilangan real.
3. Jumlahkan atau kurangkan kedua persamaan itu.
4. Selesaikan persamaan hasil (3) untuk satu variabel.
5. Substitusikan hasil (4) ke salah satu persamaan dalam sistem dan selesaikan untuk nilai dari variabel yang lain.

Metode Substitusi

Ide pokok dari menyelesaikan sistem persamaan (persamaan linier dengan variabel x dan y) dengan metode substitusi sebenarnya sama dengan metode eliminasi, yaitu mengeliminir satu variabel dalam sistem persamaan untuk memperoleh satu persamaan dengan satu variabel. Tetapi pengeliminiran variabel dalam metode substitusi tidak dilakukan dengan menjumlahkan atau mengurangkan persamaan-persamaan dalam sistem, melainkan dengan substitusi.

Swokowski (1981:234) mengemukakan langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan (persamaan linier dengan dua variabel), dengan metode substitusi sebagai berikut:

1. Selesaikan satu dari persamaan untuk satu variabel dalam variabel yang lain;
2. Substitusikan persamaan yang diperoleh dalam langkah (1) dalam persamaan yang lain, maka diperoleh persamaan dalam satu variabel;
3. Cari penyelesaian dari persamaan yang diperoleh dalam langkah (2);
4. Gunakan penyelesaian dari langkah (3) dengan persamaan yang diperoleh dari langkah (1) untuk memperoleh penyelesaian dari sistem.

Persamaan Kuadrat dengan Satu Variabel

Bentuk umum persamaan kuadrat dengan satu variabel, x adalah:

$Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$, A, B, C $\in$ R.

Menyelesaikan persamaan ini berarti mencari semua harga x yang memenuhi persamaan tersebut. Ini berarti mencari titik potong antara grafik $y = Ax^2 + Bx + C$ dengan Sumbu X.

Dalam menyelesaikan persamaan kuadrat ini ada beberapa cara yang digunakan, yaitu:

(1) pemfaktoran;

(2) melengkapkan kuadrat sempurna

(3) rumus abc :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Kaufman, 1982:24).

Persamaan Kuadratik Irisan Kerucut

Bentuk-bentuk kerucut (conics) atau irisan-irisan kerucut (conic sections) adalah kurva-kurva yang diperoleh dari perpotongan antara sebuah bidang dengan kerucut. Bentuk umum persamaan kuadratis irisan kerucut adalah:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

x, y adalah variable

A, B, C, D, E, F $\in$ R dengan A, B, C tidak semuanya nol

(Anton, 1980:699).

Jika θ adalah sudut yang dibentuk oleh bidang dan sumbu kerucut dan α adalah sudut yang dibentuk oleh garis lukis dan sumbu kerucut maka irisan yang terjadi merupakan :

1. Lingkaran, jika $\theta = 90^\circ$
2. Ellips, jika $\alpha < \theta < 90^\circ$,
3. Hiperbola, jika $0 \leq \theta < \alpha$;
4. Parabola, jika $\theta = \alpha$;
5. Sebuah garis, jika $\theta = \alpha$ dan bidang melalui puncak kerutu;
6. Sebuah titik tunggal, jika $\theta = 90^\circ$ dan bidang memotong kerucut pada puncak kerucut;
7. Sepasang garis yang saling berpotongan, jika $\theta = \alpha$ dan bidang melalui puncak kerucut.

Lingkaran

Definisi: Lingkaran adalah himpunan semua titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap yang diketahui. Jarak yang sama tersebut dinamakan pusat lingkaran. (Anton, 1980:674).

Dari definisi tersebut maka grafik persamaan kuadratis irisan kerucut, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, akan berupa lingkaran jika A = C, A, C $\neq 0$. Dalam kasus khusus dapat juga terjadi lingkaran titik atau tak menghasilkan grafik riel.

Parabola

Definisi: Parabola adalah himpunan semua titik pada bidang yang berjarak sama dari garis tertentu dan titik tertentu yang tidak terletak pada garis. Garis tertentu tersebut dinamakan direktriks dan titik tertentu tersebut dinamakan fokus parabola (Anton, 1980:675).

Dari defini tersebut maka grafik persamaan kuadratis irisan kerucut, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, akan berupa parabola jika persamaannya berbentuk kuadratik dalam satu variabel dan linier dalam variabel yang lain.

Ellips

Definisi: Ellips adalah himpunan semua titik pada bidang yang jumlah jaraknya dari dua titik tetap berupa konstanta positif tertentu. Dua titikt tetap tersebut dinamakan fokus-fokus ellips dan titik tengah ruas garis yang menghubungkan kedua fokus itu disebut pusat ellips (Anton, 1980:683).

Dari definisi tersebut maka grafik persamaan kuadratis irisan kerucut, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, akan berupa ellips jika A dan C bertanda sama (keduanya positif atau keduanya negatif). Dalam kasus khusus dapat juga terjadi suatu titik atau tidak menghasilkan grafik riel.

Hiperbola

Definisi: Hiperbola adalah himpunan semua titik pada bidang yang selisih jaraknya dari dua titik tetap berupa konstanta positif tertentu. Dua titik tetap tersebut dinamakan fokus-fokus hiperbola dan titik tengah ruas garis yang menghubungkan kedua fokus itu disebut hiperbola (Anton, 1980:690).

Dari definisi tersebut maka grafik persamaan kuadratis irisan kerucut, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, akan berupa hiperbola jika A dan C berlaninan tanda dan keduanya tak nol. Dalam kasus khusus dapat juga terjadi sepasang garis lurus berpotongan.

Dari bentuk umum persamaan kuadratis irisan kerucut, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, jika ditinjau dari diskriminannya (B^2-4AC) maka:

1. Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka grafik persamaan akan berupa ellips atau lingkaran atau tanpa grafik.
2. Jika $B^2 - 4AC > 0$ maka grafik persamaan akan berupa hiperbola atau sepasang garis yang berpotongan.
3. Jika $B^2 - 4AC = 0$ maka grafik persamaan akan berupa parabola atau sebuah garis atau sepasang garis yang sejajar atau tanpa grafik.

Bentuk irisan kerucut yang berupa ellips, lingkaran, parabola dan hiperbola merupakan bentuk irisan kerucut yang tak berdegenerasi (non degenerate). Sedangkan bentuk irisan kerucut yang lain dinamakan berdegenerasi (degenerate).

PEMBAHASAN

Menyelesaikan suatu sistem persamaan kuadratik irisan kerucut adalah mencari semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan kuadratik irisan kerucut dalam sistem persamaan kuadratik irisan kerucut. Bentuk umum persamaan kuadratik irisan kerucut dengan variabel x dan y adalah :

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

A, B, C, D, F $\neq$ 0, A, B, C $\in$ R dengan A, B, C tidak semuanya nol.

Sehingga bentuk umum sistem persamaan kuadratik irisan kerucut yang terdiri dari dua persamaan kuadratik irisan kerucut adalah :

$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D1x + E_1y + F_1 = 0$

$A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$

$A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1,A_2,B_2,C_2,D_2,E_2,F_2 \in R$ dengan A_1, B_1, C_1, tidak semuanya nol dan A_2, B_2, C_2 tidak semuanya nol.

Menyelesaikan Sistem Persamaan Kuadratik Irisan Kerucut dengan Metode Substitusi

Dari kajian tentang metode substitusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan dua variabel, maka untuk menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut dengan metode ini, **satu persamaan dalam sistem harus dapat diubah menjadi x = (dalam y) atau y = (dalam x)**, untuk disubstitusikan ke persamaan yang lain. Ada 7 (tujuh) bentuk persamaan kuadratik yang mungkin, yaitu

1. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, B, C, D, E, F $\in$ R dengan A, B, C tidak nol;
2. $Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$, A, B, D, E, F $\in$ R dengan A, B, tidak nol;
3. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, C, D, E, F $\in$ R dengan A, C tidak nol;
4. $Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, B, C, D, E, F $\in$ R dengan B, C tidak nol;
5. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, D, E, F $\in$ R dengan A tidak nol;
6. $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, B, D, E, F $\in$ R dengan B tidak nol;

7. $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, C, D, E, F $\in$ R dengan C tidak nol

Mari kita bahas satu persatu dari ke-7 persamaan di atas.

1. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, B, C, D, E, F $\in$ R dengan A, B, C, tidak nol.

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Ax^2 + (By + D)x + (Cy^2 + Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(By+D) \pm \sqrt{(By+D)^2 - 4.A.(Cy^2+Ey+F)}}{2.A}$$

berbentuk x = (dalam y)

atau

$Ax^2 + Bxy^2 + Cy + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Cy^2 + (By + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - 4.C.(Ax^2+Dx+F)}}{2.C}$$

berbentuk y = (dalam x)

2. $Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$, A, B, D, E, F $\in$ R dengan A, B, tidak nol;

$Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Bxy + Ey + Ax^2 + Dx + F = 0$

$\Leftrightarrow (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$

$\Leftrightarrow (Bx + E)y = -(Ax^2 + Dx + F)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-(Ax^2 + Dx + F)}{(Bx + E)}$$

berbentuk y = (dalam x).

atau

$Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Ax^2 + (By + D)x + (Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(By+D) \pm \sqrt{(By+D)^2 - 4.A.(Ey+F)}}{2.A}$$

Berbentuk x = (dalam y)

3. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, C, D, E, F $\in$ dengan A, C, tidak nol;

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Ax^2 + Dx + (Cy^2 + Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4.C.(Ax^2 + Dx + F)}}{2.C}$$

Berbentuk y = (dalam x)

4. $Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$, B, C, D, E, F $\in$ R dengan B, C tidak nol.

$Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Cy^2 + (Bx + E)y + (Dx + F) = 0$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-B(x+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - 4.C.(Dx+F)}}{2.C}$$

Berbentuk y = (dalam x)

atau

$Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow (By + D)x + (Cy^2 + Ey + F) = 0$

$\Leftrightarrow (By + D)x = -(Cy^2 + Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(Cy^2 + Ey + F)}{(By + D)}$$

Berbentuk x = (dalam y)

5. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, A, D, E, F $\in$ R dengan A tidak nol.

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Ax^2 + Dx + (Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4.A.(Ey+F)}}{2.A}$$

Berbentuk x = (dalam y).

atau

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow Ey + (Ax^2 + Dx + F) = 0$

$\Leftrightarrow Ey = -(Ax^2 + Dx + F)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-(Ax^2 + Dx + F)}{E}$$

Berbentuk y = (dalam x)

6. $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, B, D, E, F $\in$ R dengan B tidak nol.

$Bxy + Dx + Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow (By + D)x + (Ey + F) = 0$

$\Leftrightarrow (By + D)x = -(Ey + F)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(Ey+F)}{(By+D)}$$

Berbentuk x = (dalam y).

atau

$Bxy + Dx + Ey + F = 0$
$\Leftrightarrow (Bx + E)y + (Dx + F) = 0$
$\Leftrightarrow (Bx + E)\ Y = -(Dx + F)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-(Dx+F)}{(Bx+E)}$$

Berbentuk y = (dalam x)

7. $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, C, D, E, F $\in$ R dengan C tidak nol.
$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
$\Leftrightarrow Cy^2 + Ey + (Dx + F) = 0$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4.C.(Dx+F)}}{2.C}$$

Berbentuk y = (dalam x)

atau

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
$\Leftrightarrow Dx + (Cy^2 + Ey + F) = 0$
$\Leftrightarrow Dx = -(Cy^2 + Ey + F) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(Cy^2 + Ey + F)}{D}$$

Berbentuk x = (dalam y)

Jadi semua bentuk persamaan kuadratik irisan kerucut dapat diubah ke bentuk x = (dalam y) atau y = (dalam x). Oleh sebab itu, maka sistem persamaan kuadratik irisan kerucut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode substitusi.

Contoh :

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode substitusi :

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 2y = 3 \\ 2x^2 + 2y^2 - y = 9 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$x^2 - 3y^2 + 2y = 3$ .... (1)
$2x^2 + 2y^2 - y = 9$ .... (2)
(1) $x^2 - 3y^2 + 2y = 3$
$\Leftrightarrow x^2 - (3y^2 - 2y) = 3$
$\Leftrightarrow x^2 = 3 + (3y^2 - 2y)$ .... (3)

(2) $2x^2 - 2y^2 - y = 9$
$\Leftrightarrow 2(3 + 3y^2 - 2y) + 2y^2 - y = 9$, substitusi (3) ke (2)
$\Leftrightarrow 6 + 6y^2 - 4y + 2y^2 - y = 9$
$\Leftrightarrow 8y^2 - 5y - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (y - 1)(8y + 3) = 0$
$\Leftrightarrow y - 1 = 0$ atau $8y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow y = 1$ atau $y = -3/8$
$y = 1$ ® $x^2 = 3 + (3(1)^2 - 2(1))$, substitusi ke (3)
$\Leftrightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -2$
$y = -3/8$ ® $x^2 = 3 + (3(-3/8)^2 - 2(-3/8))$, substitusi ke (3)
$\Leftrightarrow x^2 = 267/64$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{267/8}$ atau $x = -\sqrt{267/8}$

Jadi selesaiannya adalah :

HP = {(x,y)/ (2,1), (-2, 1), ($\sqrt{267/8}$, -3/8), ($-\sqrt{267/8}$, -33/8)}

Jadi dalam menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut dengan metode substitusi meliputi langkah-langkah :

1. Ubah satu persatu ke bentuk x = (dalam y) atau y = (dalam x).
2. Substitusikan persamaan hasil langkah 1 ke persamaan kedua (diperoleh persamaan dengan satu variabel).
3. Selesaikan persamaan hasil langkah 2 (diperoleh selesaian untuk satu variabel)
4. Substitusikan persamaan hasil langkah 3 ke persamaan hasil langkah 1 (diperoleh selesaian untuk variabel kedua).

Menyelesaikan Sistem Persamaan Kuadratik Irisan Kerucut dengan Metode Eliminasi

Menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut dengan metode eliminasi berarti mencari semua pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi setiap persamaan kuadratik irisan kerucut dalam sistem dengan **mengeliminir suku-suku yang memuat variabel (x, y, xy, x^2, y^2)**, yaitu dengan cara mengurangi atau menambahkan persamaan-persamaan dalam sistem sehingga diperoleh penyelesaian dari sistem.

Dari kemungkinan bentuk-bentuk persamaan kuadratik irisan kerucut, maka sistem persamaan kuadratik irisan kerucut yang mungkin terjadi adalah :

$$1. \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Hxy + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Gx^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Hxy + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} Bxy + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$

$$28. \begin{cases} Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Iy^2 + Jx + Ky + L = 0 \end{cases}$$

Pada system persamaan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, jika satu suku yang mengandung x atau y atau xy atau x^2 atau y^2 dieliminir, maka akan diperoleh bentuk **persamaan kuadratik irisan kerucut** dan pada system persamaan 23, 26, 28, jika satu suku yang mengandung xy atau x^2 atau y^2, akan diperoleh **persamaan linier**. Bentuk-bentuk persamaan kuadratik irisan kerucut dapat diubah menjadi x = (dalam y) atau y = (dalam x), begitu juga dengan persamaan linier. Oleh sebab itu, jika persamaan ini disubstitusikan ke salah satu persamaan dalam sistem akan diperoleh persamaan dalam satu variabel. Dengan menyelesaikan persamaan ini akan diperoleh nilai untuk satu variabel. Jika nilai dari variabel ini disubstitusikan ke salah satu persamaan dalam sistem, maka akan diperoleh nilai dari variabel kedua. Sehingga selesaian dari sistem diperoleh. Jadi metode eliminasi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut.

Contoh:

Selesaikan sistem persamaan kuadratik berikut dengan metode Eliminasi:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy - 3y^2 - 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$x^2 - xy + y^2 = 1$ .... (1)

$x^2 + xy + 3y^2 - 2x + 2y = -1$ .... (2)

$x^2 - xy + y^2 = 1$

$\underline{x^2 + xy - 3y^2 - 2x + 2y = -1 \; +}$

$2x^2 - 2y^2 - 2x + 2y = 0$ X½

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$

$\Leftrightarrow x^2 - x - ¼ = y^2 - y - ¼$

$\Leftrightarrow (x^2 - ½)^2 = (y - ½)^2$

$\Leftrightarrow x - ½ = \pm (y - ½)$

$x - ½ = (y - ½)$

$\Leftrightarrow x = y$ ® $(y)^2 - (y)y + y^2 = 1$, substitusi ke (1)

$\Leftrightarrow y^2 - y^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 = 1$ ® $y = 1$ atau $y = -1$

$x - ½ = -(y - ½)$ ® $x = -y + 1$ ® $(-y + 1)^2 - (-y + 1) y + y^2 = 1$ ……..... substitusi ke (1)

$\Leftrightarrow (y^2 - 2y + 1) - (-y^2 + y) + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 3y^2 = 3y = 0$

$\Leftrightarrow y (y - 1) = 0$ ® $y = 0$ atau $y = 1$

$y=0$ ® $x=1$

$y=1$ ® $x=0$

Maka selesaiannya adalah :

Hp = {(x,y)/ (-1, -1), (0, 1), (1, 0), (1, 1)}

Jadi dalam menyelesaikan sistem persamaan kuaratik irisan kerucut dengan metode eliminasi, meliputi langkah-langkah :

1. Eliminir suku yang memuat variabel (x, y, xy, x^2, y^2) dari sistem dengan cara mengalikan atau membagi persamaan dengan bilangan real tidak nol kemudian menjumlahkan atau mengurangkan persamaan-persamaan dalam sistem;
2. Ubah persamaan yang diperoleh dari langkah 1 ke bentuk persamaan x = (dalam y) atau y (dalam x);
3. Substitusikan persamaan yang diperoleh dari langkah 2 ke salah satu persamaan dalam sistem (diperoleh persamaan dalam satu variabel).
4. Selesaikan persamaan yang diperoleh dari langkah 3 (diperoleh selesaian untuk satu variabel);
5. Substitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 4 ke salah satu persamaan dalam sistem (diperoleh selesaian dari sistem).

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari kajian di atas maka disimpulkan bahwa:

1. Metode substitusi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut, dengan langkah-langkah:
   a. Ubah satu persamaan ke bentuk x = (dalam y) atau y = (dalam x).
   b. Substitusikan persamaan dari langkah 1 ke persamaan ke-2, akan diperoleh persamaan dengan satu variabel.
   c. Selesaikan persamaan dari langkah 2, akan diperoleh penyelesaian dari satu variabel
   d. Substitusikan hasil dari langkah 3 ke persamaan dari langkah 1, akan diperoleh penyelesaiannya dari sistem persamaan kuadratik irisan kerucut.
2. Metode eliminasi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan kuadratik irisan kerucut, dengan langkah-langkah:
   a. Eliminir suku yang memuat variabel (x, y, xy, x^2, y^2) dari sistem dengan cara mengalikan atau membagi persamaan dengan bilangan real kemudian menjumlahkan atau mengurangkan persamaan-persamaan dalam sistem.
   b. Ubah persamaan yang diperoleh dari langkah 1 ke bentuk persamaan x = (dalam y) atau y = (dalam x).
   c. Substitusikan persamaan yang diperoleh dari langkah 2 ke salah satu persamaan dalam sistem

sehingga diperoleh persamaan dengan satu variabel.

d. Selesaikan persamaan yang diperoleh dari langkah 3, akan diperoleh penyelesaian untuk satu variabel.

e. Substitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 4 ke salah satu persamaan dalam sistem, akan diperoleh penyelesaian dari sistem.

Saran

Sistem persamaan kuadratik irisan kerucut yang dibahas dalam kajian ini adalah sistem persamaan kuadratik irisan kerucut yang teridiri dari dua persamaan kuadratik irisan kerucut. Penelitian lanjutan untuk sistem persamaan kuadratik irisan kerucut dengan banyak persamaan kuadratik irisan kerucut yang lebih besar atau hingga n, n N, $n > 2$, akan lebih menambah wawasan

tentang sistem persamaan dan metode penyelesaian sistem persamaan.

DAFTAR PUSTAKA

Anton,H. 1980. *Calculus With Analytic Geometry.* John Wiley & Sons Inc. :New York

Anton,H and Rores, Chris. 1991. *Elementary Linier Algebra Aplications Vertion 6 edition.* John Wiley & Sons Inc.: New york.

Hall, H.S. and Knight, S.R. 1960. *Higher Algebra.*Macmillan & Co ltd : London.

Kaufmann, Jerome E.. 1982. *Intermediate Algebra for College Students.* PWS Publishers: Boston.

Keedy, Mervin L., Bittinger, Marvin L. and Rudolph, William B.. 1985.*Algebra for College Students.* Addison-Wesley Publishing Company: Massachusetts.

Rees, Paul K. and Spark, Fred W.. 1957. *Intermediate Algebra.* McGraw-Hill Book Company Inc.: New York

Swokowski, Earl William. 1981.